

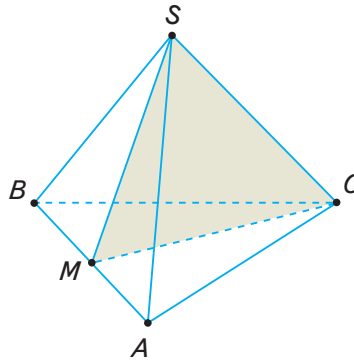
**М. І. Бурда, Т. В. Колесник,
Ю. І. Мальований,
Н. А. Тарасенкова**

МАТЕМАТИКА

**Підручник для 10 класу
загальноосвітніх навчальних закладів**

Рівень стандарту

*Рекомендовано Міністерством
освіти і науки України*



*Підручник — переможець
Всеукраїнського конкурсу підручників
Міністерства освіти і науки України в 2010 р.*

**Київ
«Зодіак-ЕКО»
2010**

ББК 22.151я721

Б91

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 3 березня 2010 р. № 177)*

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Наукову експертизу проводив *Інститут математики Національної академії наук України*;
психолого-педагогічну експертизу проводив *Інститут педагогіки
Національної академії педагогічних наук України*.

Експерти рукопису підручника:

В. В. Вдовенко — доцент Кіровоградського державного педагогічного університету
імені Володимира Винниченка

Т. М. Дорошенко — учитель, старший учитель Смілянської ЗОШ I — III ст. № 7,
Черкаська область;

О. В. Читаєва — учитель Луганської спеціалізованої школи № 57;

О. А. Калашник — завідувач МК відділу освіти Добровеличківської РДА,
Кіровоградська область;

К. В. Калібреда — методист, спеціаліст вищої категорії МК відділу освіти Іванівської РДА,
Херсонська область

ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА

Юрій КУЗНЕЦОВ — керівник проекту,
розробник концепцій: структури, дизайну;

Михайло БУРДА, Тамара КОЛЕСНИК, Юрій МАЛЬОВАНИЙ,

Ніна ТАРАСЕНКОВА — автори тексту і методичного апарату;

Наталія ДЕМИДЕНКО — редактор-організатор, контрольне редагування;

Володимир ЛИТВИНЕНКО — розробник макета, художнього оформлення,
художник обкладинки;

Валентина МАКСИМОВСЬКА — організатор виробничого процесу;

Галина КУЗНЕЦОВА — економічний супровід проекту;

Роман КОСТЕНКО — маркетингові дослідження підручника;

Андрій КУЗНЕЦОВ — моніторинг апробації підручника

© Видавництво «Зодіак-ЕКО». Усі права захищені. Жодна частина, елемент, ідея, композиційний підхід цього видання не можуть бути скопійованими чи відтвореними в будь-якій формі та будь-якими засобами — ні електронними, ні фотомеханічними, зокрема ксерокопіюванням, записом чи комп'ютерним архівуванням, — без письмового дозволу видавця.

© М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю. І. Мальований,
Н. А. Тарасенкова, 2010

© Видавництво «Зодіак-ЕКО», 2010

© Художнє оформлення. В. П. Литвиненко, 2010

© Концепції: структури, дизайну. Ю. Б. Кузнецов, 2010

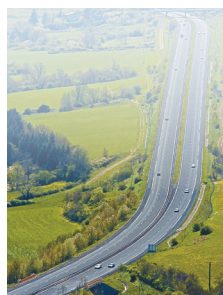
ISBN 978-966-7090-71-5

ЗМІСТ

Дорогі учні!	5
ВСТУП.....	7

Частина I. АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Розділ 1. ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ



§ 1. Дійсні числа та обчислення	13
§ 2. Відсоткові розрахунки	19
§ 3. Числові функції та їх властивості	22
§ 4. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень	34
§ 5. Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня та його властивості	40
§ 6. Степінь з раціональним показником. Поняття про степінь з ірраціональним показником.....	47
§ 7. Ірраціональні рівняння	52
§ 8. Степенева функція та її властивості	57
Перевірте, як засвоїли матеріал	
Контрольні запитання	63
Тестові завдання до розділу 1.....	64

Розділ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ



§ 9. Синус, косинус, тангенс, котангенс кутів від 0° до 180° (<i>повторення</i>)	71
§ 10. Кути довільної градусної міри.....	73
§ 11. Тригонометричні функції довільного кута	76
§ 12. Побудова кута за даним значенням його тригонометричної функції.....	80
§ 13. Радіанне вимірювання кутів	85
§ 14. Тригонометричні функції числового аргументу	89
§ 15. Формули зведення	92
§ 16. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу	98
§ 17. Формули додавання для косинуса.....	103
§ 18. Формули додавання для синуса.....	106
§ 19. Формули додавання для тангенса і котангенса.....	108
§ 20. Тригонометричні функції подвійного аргументу	110
§ 21. Основні властивості тригонометричних функцій.....	114
§ 22. Графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$	119
§ 23. Графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$	124
§ 24. Гармонічні коливання.....	127

§ 25. Рівняння $\sin x = a$	131
§ 26. Рівняння $\cos x = a$	135
§ 27. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ та $\operatorname{ctg} x = a$	139
§ 28. Розв'язування складніших тригонометричних рівнянь	142
§ 29. Приклади розв'язування тригонометричних нерівностей ..	145
Перевірте, як засвоїли матеріал	
Контрольні запитання	149
Тестові завдання розділу 2.....	150

Частина II. ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 3. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ ТА ПЛОЩИН



§ 30. Що вивчають у стереометрії.....	155
§ 31. Аксиоми стереометрії	160
§ 32. Взаємне розміщення двох прямих у просторі	164
§ 33. Взаємне розміщення прямої та площини	172
§ 34. Взаємне розміщення двох площин	176
§ 35. Властивості паралельних площин	182
§ 36. Паралельне проектування.....	188

Перевірте, як засвоїли матеріал

Контрольні запитання	197
Тестові завдання розділу 3.....	198

Розділ 4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ ТА ПЛОЩИН



§ 37. Перпендикулярність прямої та площини	201
§ 38. Перпендикуляр і похила до площини	206
§ 39. Теорема про три перпендикуляри	212
§ 40. Залежність між паралельністю і перпендикулярністю прямих та площин	217
§ 41. Перпендикулярні площини.....	221
§ 42. Ортогональне проектування	226

Перевірте, як засвоїли матеріал

Контрольні запитання	231
Тестові завдання розділу 4.....	232

ПОВТОРЕННЯ ВИВЧЕНОГО

Алгебра і початки аналізу	234
Геометрія	245
Відомості з курсу алгебри 7 — 9 класів	254
Відомості з курсу планіметрії.....	266

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ.....	270
----------------------------	-----

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	284
---------------------------	-----

Дорогі учні!

Ви приступаєте до вивчення курсу математики, який складається з двох частин — алгебри і початків аналізу та стереометрії — розділу геометрії.

У першій частині курсу математики ви систематизуєте і поглибите знання про степінь числа, властивості вже відомих функцій, ознайомитеся з новими функціями — степеневими і тригонометричними. Виробите вміння будувати графіки функціональних залежностей, застосовувати вивчені поняття і властивості до розв’язування задач та дослідження найпростіших математичних моделей.

Друга частина курсу математики присвячена стереометрії — розділу геометрії про властивості фігур у просторі. У 9 класі ви ознайомилися з деякими властивостями таких фігур. Знаєте, як можуть розміщуватися в просторі прямі та площини, як знаходити поверхні та об’єми окремих видів многогранників і тіл обертання. Тепер ви розширите і поглибите свої знання зі стереометрії. Дізнаєтеся про аксіоми стереометрії та наслідки з них, про паралельність і перпендикулярність у просторі. Виробите вміння застосовувати вивчені поняття, властивості й ознаки під час розв’язування задач та на практиці. Ви переконаєтеся, що знання й уміння зі стереометрії потрібні багатьом спеціалістам — архітекторам, будівельникам, конструкторам, токарям, фрезерувальникам та ін.

Як успішно вивчати математику за цим підручником? Весь матеріал поділено на розділи, а розділи — на параграфи. Кожний параграф містить теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, виділений кольором і обведений рамкою. Це найважливіші означення і властивості. Їх потрібно зрозуміти, запам’ятати і вміти застосовувати під час розв’язування задач. Інші важливі відомості надруковано **жирним** шрифтом. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви понять). У тексті параграфів ви знайдете також зразки розв’язань деяких задач і вправ.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Згадайте головне» після кожного параграфа. Наприкінці кожного розділу вміщено контрольні запитання і тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('), Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечком (°) позначають задачі та вправи середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати математику далі. Номери задач і вправ достатнього рівня складності не мають позначки біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочкою (*) позначено задачі та вправи високого рівня складності. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння і наполегливість. Радість від того, що ви розв'язали складну задачу, буде вам нагородою. Відшукати шляхи до розв'язування деяких із таких задач допоможуть вказівки, вміщені у відповідях.

Розв'язавши задачі, що виділено жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці математичні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити свої знання.

У кінці підручника ви знайдете необхідний додатковий матеріал та вправи для повторення курсу, вивченого в 10 класі, а також курсу алгебри і геометрії 7 — 9 класів.

У підручнику застосовуються спеціальні позначки (пиктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.



Прочитайте



Як записати



Поміркуйте



Як діяти



Запам'ятайте



Типова задача

Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового і задоволення від навчання!

Вступ

У природі існує внутрішньо притаманна їй прихована гармонія, яка відображається в нашому розумі у вигляді простих математичних законів.

Герман Вейль

...природа формулює свої закони мовою математики.

Галілео Галілей

Усі наші знання про навколишній світ уявляються у вигляді найрізноманітніших моделей: інтуїтивних, словесних, механічних, електричних, математичних. Моделювання в широкому розумінні є одним з основних способів вивчення довкілля. Якщо йдеться про природничі науки, то найпоширенішими є фізичне та математичне моделювання.

Процес фізичного моделювання заснований, як правило, на теорії подібності. Фізична модель фактично є певним макетом досліджуваної системи зі збереженням її фізичної сутності. Разом з тим фізичний тип моделі має обмежену сферу застосування. Не для кожного явища і не для кожного об'єкта можна побудувати зменшені фізичні аналоги, а іноді це робити не доцільно. У таких випадках застосовують математичне моделювання.

Математичними моделями прийнято називати системи математичних об'єктів, що описують досліджуваний процес або явище математичною мовою. Для складання математичних моделей використовують різноманітні математичні засоби: рівняння, функції, графи, таблиці й схеми, співвідношення математичної логіки, геометричні конструкції тощо. У моделі концентрується сукупність наших знань, уявлень, гіпотез про відповідний об'єкт чи явище. Оскільки ці знання ніколи не бувають абсолютними, а гіпотези можуть іноді навмисно не враховувати деякі факти (наприклад, вплив сили тертя в механіці, тепловтрати в електротехніці тощо), то модель лише наближено описує поведінку реальної системи. Заміна вже наявних моделей на ті, в яких повніше відтворюються суттєві для дослідження властивості процесу чи явища, комбіноване застосування різних моделей — шлях пізнання дійсності.

Історія розвитку математики дає змогу зрозуміти закономірності становлення математичного моделювання та його значення в пізнанні світу. Моделювання в математиці почалося разом з її формуванням. У період, коли формувалися початкові математичні поняття та уявлення, відбувалося переважно накопичення математичних абстракцій, панували найпростіші математичні операції. Серед перших математичних систем найвідомішою є геометрія Евкліда, практичне походження якої не викликає сумніву. Геометрія Евкліда важлива тим, що в її основі були система ретельно продуманих аксіом і дедуктивно-логічний

характер розвитку міркувань, що надало їй форму, характерну нині для математичних теорій взагалі. Евклідова геометрія — один з ранніх прикладів того, що математичні моделі, виникнувши, стають відносно самостійними й вивчаються в математиці незалежно від кола задач, що зумовили їх створення.

Практика і теорія обчислювальних, а потім арифметико-алгебраїчних частин математики вимагали створення моделей іншого типу. Йдеться про задачі, які зводяться до складання та розв'язування рівнянь і одночасно до розширення поняття числа. Намагання повніше вивчити реальні об'єкти приводило до побудови моделей, які допомагали глибше проникати в сутність понять величини, числа, рівняння та інших.

Математичні методи здавна широко застосовуються у фізиці, починаючи з найдавнішого її розділу — механіки. В історії науки є чимало прикладів застосування математичного моделювання до проблем фізики. Класичним прикладом може бути відкриття французьким ученим-астрономом У. Левер'є в 1846 р. нової планети Сонячної системи — Нептуна. Відкриття було зроблено математично, «на кінчику пера». Вихідною інформацією стало відхилення в русі відомої планети Уран, траєкторія якої не збігалася з обчисленою для неї кеплеровою орбітою. Левер'є припустив, що причиною цього є невідома планета і обчислив її траєкторію, виходячи з рівнянь небесної механіки. На підставі його вказівок нову планету виявив німецький астроном Й. Г. Галле. Незалежно від У. Левер'є розрахував орбіту та координати планети Нептун і англійський астроном Д. Адамс (1845 р.). Ця робота вимагала величезної кількості трудомістких обчислень, які довелося виконувати вручну. Адамс навіть винайшов новий метод чисельного розв'язування диференціальних рівнянь, який в обчислювальній математиці названий його ім'ям.

Історія суднобудування пов'язана з іменем академіка О. М. Крилова (1863 — 1945). Саме він розробив математичні моделі конструкцій суден. Математичне моделювання в цьому випадку мало яскраву практичну спрямованість, бо давало конкретні рекомендації щодо оптимального вибору конструкції. Це вимагало значної обчислювальної роботи і вдосконалення методів розрахунків. О. М. Крилову належить перший у світовій науковій літературі курс з чисельних методів «Лекції про наближені обчислення», виданий у 1911 р.

Ще приклад. Однією з перешкод на шляху створення швидкісних літаків було таке грізне явище, як флатер: під час експериментальних польотів у деяких критичних режимах несподівано виникали різкі вібрації конструкції — і машина буквально розвалювалася в повітрі на частини. Яка причина аварій? У техніці відомі випадки руйнування конструкцій під дією періодичних навантажень через резонансні явища, в результаті яких коливання конструкції невпинно зростають і можуть спричинити катастрофу. В разі флатера періодичні вібрації



М. В. Остроградський

породжуються повітряними вихорами, які зриваються з крил і хвостового оперення літака під час обтікання їх потоком повітря. Частота поштовхів зростає разом із швидкістю і, наблизившись до частоти власних коливань елементів конструкції літака, може спричинити резонанс. Флатер детально вивчали експериментально, однак лише за допомогою методу математичного моделювання було створено надійні практичні методи боротьби з цим небезпечним явищем. Академік М. В. Келдиш побудував математичну модель для обчислення частот власних коливань елементів конструкції літака, чим збагатив не тільки механіку й літакобудування, а й математичну науку.



М. М. Крилов

Значний внесок у розвиток прикладної математики зробили українські вчені-математики М. В. Остроградський (1801 — 1862), В. Я. Буняковський (1804 — 1889), Д. О. Граве (1863 — 1939), М. М. Крилов (1879 — 1955), М. П. Кравчук (1892 — 1942), М. М. Боголюбов (1909 — 1992), Ю. О. Митропольський (1917 — 2008), В. М. Остапенко (1923 — 1994) та інші.

Зокрема, М. В. Остроградський розробив математичні методи розв’язування задач аналітичної механіки, гідромеханіки, теорії пружності, небесної механіки. М. М. Крилов — засновник Київської математичної школи нелінійної механіки та математичної фізики. Наукові праці М. П. Кравчука широко застосовуються в розв’язуванні прикладних задач.

Застосування математики до розв’язування прикладних задач можна зобразити такою схемою: побудова математичної моделі → розв’язування математичної задачі → змістовий аналіз одержаних результатів.

Складність математичної моделі визначається, як правило, складністю досліджуваного об’єкта й точністю розрахунків. У період, що передував створенню потужної обчислювальної техніки, використання математичних моделей у науці й техніці було обмеженим через необхідність виконання величезного обсягу обчислень. Збільшивши в десятки й сотні мільйонів разів швидкість виконання арифметичних і логічних операцій, обчислювальні машини значно підвищили продуктивність інтелектуальної праці людини і сприяли докорінним змінам у галузі переробки інформації. У наш час обчислювальні машини застосовуються в усіх сферах інтелектуальної діяльності людини, стають одним з вирішальних чинників науково-технічного прогресу.

За допомогою перших електронно-обчислювальних машин вдалося розв’язати складні математичні задачі ядерної фізики, балістики,



М. П. Кравчук

прикладної та небесної механіки. Саме під час розв'язування цих задач відбулося формування якісно нового методу теоретичних досліджень, який згодом трансформувався в нову сучасну технологію і методологію наукових пошуків — обчислювальний експеримент. Основою обчислювального експерименту є математичне моделювання, при цьому теоретичну базу становить прикладна математика, а технічну, ясна річ, — обчислювальні машини.

Зрозуміло, що цінність математики не зводиться тільки до вивчення певних явищ або процесів за допомогою певних моделей. Математика — це важлива наука, вона дає потужні методи для пізнання світу та вивчення його закономірностей.

Головна сила математики полягає в тому, що разом із розв'язуванням однієї конкретної задачі вона створює загальні прийоми та методи, що можуть бути застосовані в багатьох інших випадках, які навіть не завжди можна передбачити.

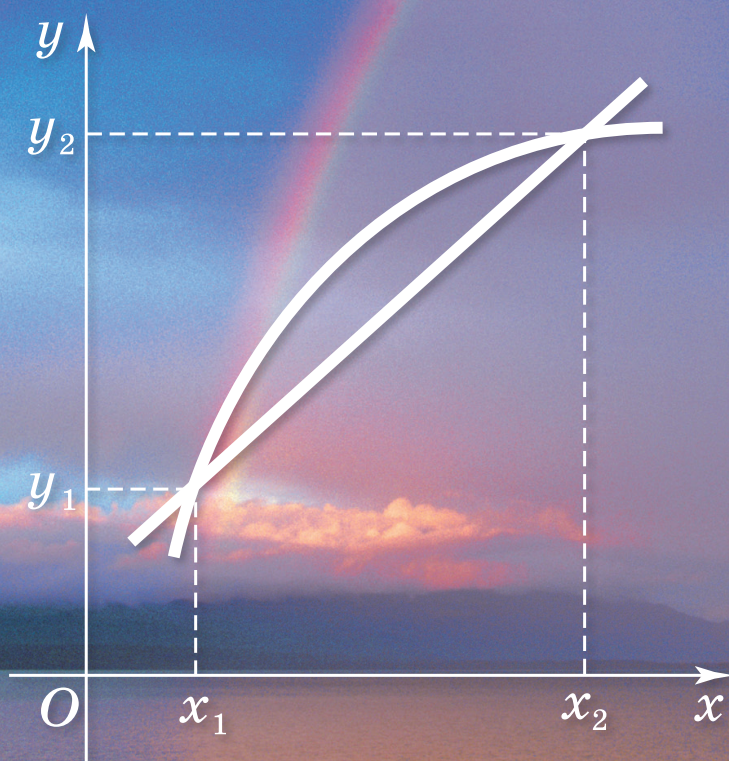
Щоб з успіхом застосовувати математичні методи під час вивчення якого-небудь іншого питання, необхідно передусім мати знання, вміти правильно користуватися математичним апаратом, знати межі допустимого використання математичної моделі, яка розглядається.

Значення вивчення математики полягає в тому, що вона вдосконалює загальну культуру міркувань, дисциплінує людину і привчає її логічно мислити, виховує точність і ґрунтовність аргументації.

Оволодіти достатньою мірою математичними методами, математичною культурою мислення, відчувати силу і красу математичної науки — зовсім не прості завдання. Але для того, хто здатен цього досягти, праця не буде марною. Йому відкриються нові перспективи людської діяльності, якісно нові можливості творчості й пізнання світу. Важливо зазначити, що все це доступно кожному, хто бажає оволодіти математикою, хто серйозно і послідовно її вивчатиме.

ЧАСТИНА I

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

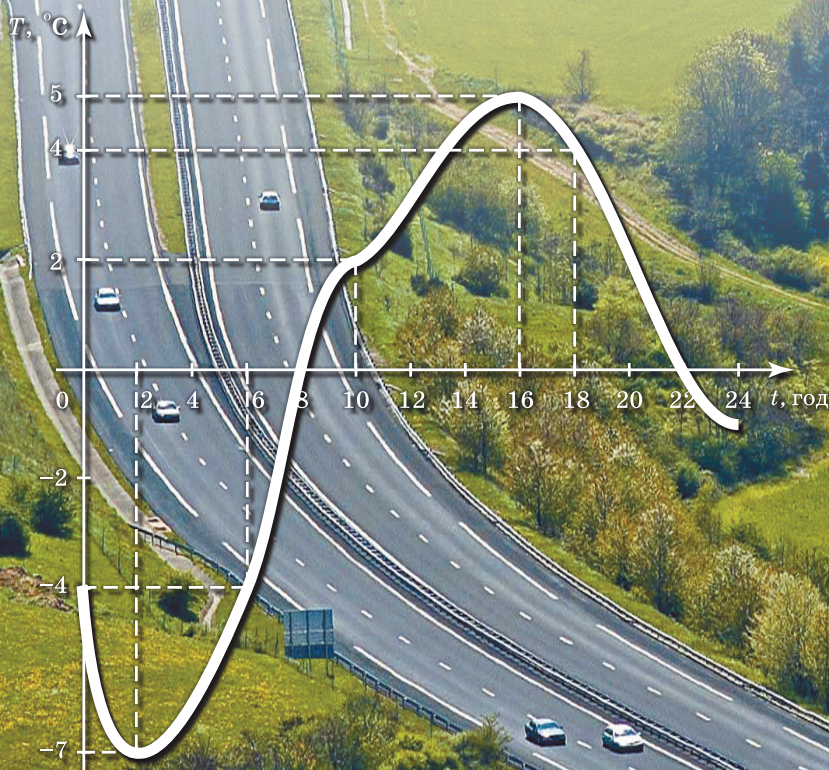


РОЗДІЛ 1

ФУНКЦІЇ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

У розділі ви:

- повторите, систематизуєте та узагальните матеріал про дійсні числа, відсотки, степені числа та функції;
- розширите знання про степінь числа, функції та їхні властивості, зокрема про степеневу функцію — математичну модель різних процесів і явищ



§ 1

Дійсні числа та обчислення



Багатовікова історія розвитку математики свідчить про те, що практичні потреби людини, насамперед вимірювання геометричних та фізичних величин, приводили до необхідності розширення поняття числа. Так, множина цілих чисел стала розширенням множини натуральних чисел унаслідок введення цілих від'ємних чисел та числа 0. Винайдення дробів привело до множини раціональних чисел, яка є розширенням множини цілих чисел.

Проте згодом виявилось, що множини раціональних чисел недостатньо навіть для того, щоб виміряти довжину довільного відрізка прямої, тобто є відрізки, довжини яких не можна виразити жодним раціональним числом. Класичним прикладом такого відрізка є діагональ квадрата зі стороною $a = 1$.

Постало питання про розширення поняття раціонального числа. Така необхідність виникла і в самій математиці, скажімо, при розв'язуванні рівняння $x^2 = a$, де a — довільне додатне раціональне число. Було введено ірраціональні числа, які в сукупності з раціональними утворюють множину дійсних чисел.

Ви знаєте такі числові множини:

- 1) множина натуральних чисел
 $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\};$
- 2) множина цілих чисел
 $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \dots\};$
- 3) множина раціональних чисел

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \right\},$$

де p — ціле число, $p \in Z$, q — натуральне число, $q \in N$;

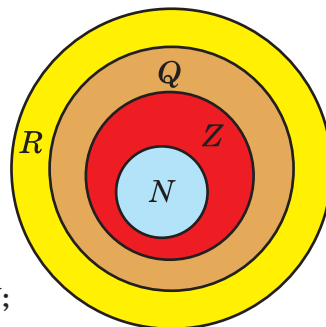
- 4) множина дійсних чисел R .

Між цими множинами існує зв'язок:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \text{ (мал. 1).}$$

Пригадаємо деякі відомості з теорії дійсних чисел.

Відомо, що



Мал. 1



будь-яке дійсне число можна подати у вигляді десяткового дробу, при цьому раціональні числа зображаються у вигляді або скінченних десяткових, або нескінченних періодичних десяткових дробів, а ірраціональні числа — у вигляді нескінченних неперіодичних десяткових дробів.

Наприклад, $\frac{1}{4} = 0,25$; $-\frac{1}{16} = -0,0625$; $2\frac{1}{32} = 2,03125$; $\frac{5}{11} = 0,(45)$;
 $-\frac{34}{75} = -0,45(3)$ — раціональні числа;

$3,020020002\dots$; $-0,010011000111\dots$; $\pi = 3,1415926\dots$;
 $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$ — ірраціональні числа.

Подання звичайного дробу у вигляді десяткового здійснюється в результаті застосування алгоритму ділення. Довільне ціле число і будь-який скінченний десятковий дріб можна подати у вигляді нескінченного періодичного дробу з періодом 0.

Наприклад, $-5 = -5,000\dots = -5(0)$; $1,25 = 1,25000\dots = 1,25(0)$.

Отже,



кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Запис дійсних чисел у вигляді нескінченних десяткових дробів зручний для їхнього порівняння та виконання арифметичних дій над ними. Нескінченні десяткові дроби порівнюють так само, як і скінченні десяткові дроби.

Наприклад, порівняємо додатні дійсні числа

$a = 5,4135\dots$, $b = 5,41(5) = 5,4155\dots$.

У записах десяткових дробів, які зображують ці числа, збігаються цифри одиниць, десятків, сотих. Проте в розряді тисячних у запису числа a стоїть цифра 3, а в запису b — цифра 5, тому число a менше від числа b : $a < b$.

З двох від'ємних дійсних чисел більшим вважають те, модуль якого менший. Наприклад, $a = -2,(75) = -2,7575\dots$, $b = -3,23(6) = -3,2366\dots$ і $a > b$.

Кожне від'ємне дійсне число менше від нуля, а нуль менший від усякого додатного дійсного числа.

Наприклад, $a = -0,1121231234\dots < 0$, $b = 1,1010010001\dots > 0$.

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, ділити (крім ділення на нуль), причому дії над дійсними числами мають ті самі властивості, що й дії над раціональними числами.

Виконуючи дії над дійсними числами, їх замінюють наближеними значеннями, а саме: дійсне число, зображуване нескінченним десятковим дробом, замінюють скінченним десятковим дробом. Обриваючи нескінченний десятковий дріб на деякому десятковому знаку, дістаємо наближене значення відповідного дійсного числа з точністю до 0,1, 0,01, 0,001 і т. д. з **недостачею**. Якщо ж останній залишений десятковий знак збільшити на 1, то таке значення називають наближеним значенням числа з **надлишком**.

Наприклад, наближеними значеннями числа $1,21(5)$ будуть такі скінченні десяткові дроби:

1,2; 1,21; 1,215; 1,2155 і т. д. (з недостатчею);

1,3; 1,22; 1,216; 1,2156 і т. д. (з надлишком), і тому правильними є нерівності:

$1,2 < 1,21(5) < 1,3$; $1,21 < 1,21(5) < 1,22$;

$1,215 < 1,21(5) < 1,216$; $1,2155 < 1,21(5) < 1,2156$ і т. д.

Зрозуміло, що чим більше десяткових знаків у наближеному значенні даного дійсного числа, тим точнішим буде його наближення.

Перетворення нескінченного періодичного десяткового дробу в звичайний дріб здійснюється за такими правилами.

- 1.** Для перетворення чистого періодичного десяткового дробу в звичайний дріб необхідно: в чисельнику поставити період дробу, а в знаменнику — число зі стількох дев'яток, скільки цифр у періоді дробу.

$$\begin{aligned}\text{Наприклад, } 0,(2) &= 0,222\dots = \frac{2}{9}; & 0,(45) &= 0,454545\dots = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}; \\ -0,(243) &= -0,243243243\dots = -\frac{243}{999} = -\frac{9}{37}.\end{aligned}$$

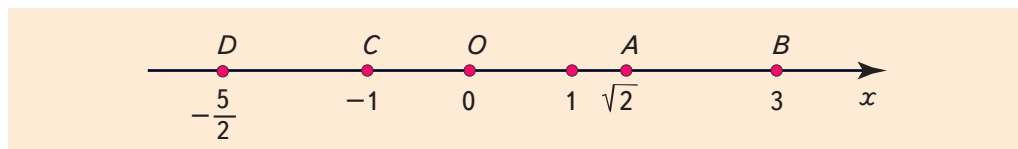
Ці рівності можна перевірити, виконавши ділення чисельника дробу на знаменник.

- 2.** Для перетворення мішаного періодичного десяткового дробу в звичайний дріб необхідно: в чисельнику записати число, що є різницею між числом, яке стоїть у десятковому дробі до другого періоду, та числом до першого періоду, а в знаменнику написати стільки дев'яток, скільки цифр у періоді, і дописати до них стільки нулів, скільки цифр від коми до першого періоду.

$$\begin{aligned}\text{Наприклад, } 0,45(3) &= 0,45333\dots = \frac{453 - 45}{900} = \frac{408}{900} = \frac{34}{75}; \\ 0,027(45) &= 0,027454545\dots = \frac{2745 - 27}{99000} = \frac{2718}{99000} = \frac{151}{5500}; \\ -0,521(9) &= -0,521999\dots = -\frac{5219 - 521}{9000} = -\frac{4698}{9000} = -\frac{261}{500}.\end{aligned}$$

Правильність цих рівностей можна перевірити, виконавши ділення чисельника на знаменник.

Дійсні числа зручно зображати точками на *координатній прямій*. На цій прямій вибирають додатний напрям (його позначають стрілкою), початок відліку — точку O (вона є зображенням числа 0) та одиницю масштабу — відрізок, що є одиницею вимірювання довжин. Точка O поділяє пряму на два промені: додатний (його позначено стрілкою) та від'ємний. На додатному промені зображають додатні числа, а на від'ємному — від'ємні. Число, якому відповідає дана точка на координатній прямій, називають *координатою цієї точки* (мал. 2).



Мал. 2

Будь-якому дійсному числу відповідає єдина точка координатної прямої. Справедливим є й обернене твердження: будь-якій точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число. Таку відповідність між множиною дійсних чисел і точками координатної прямої називають *взаємно однозначною*.

- ?** Чи має таку властивість множина: натуральних чисел; цілих чисел; раціональних чисел? Дайте відповідь і обґрунтуйте.

**ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ**

Важливим призначенням чисел є запис результатів вимірювання різних величин.

Будемо вимірювати довжину відрізків, розміщених на даній прямій. Вимірювання починають з вибору масштабу — одиниці вимірювання. За одиницю довжини візьмемо довжину деякого фіксованого відрізка e . Розглянемо довільний відрізок a . Можливі такі випадки.

1. Відрізок e вкладається у відрізок a рівно n разів, де n — натуральне число. В такому разі відрізок a приписують довжину, що дорівнює n у заданому масштабі.

2. Відрізок e не вкладається ціле число разів, однак існує такий відрізок b , який міститься ціле число разів як у відрізок e , так і у відрізок a . Якщо відрізок b міститься у відрізок e рівно n разів, а у відрізок a — рівно m разів, то відрізок a приписують довжину, яка дорівнює раціональному числу $\frac{m}{n}$ у масштабі b .

У цьому випадку кажуть, що відрізок a **сумірний** з відрізком e , а відрізок b називають спільною мірою відрізків a та e .

Зазначимо, що вибір спільної міри сумірних відрізків неоднозначний, оскільки, наприклад, половина, третина відрізка b також є спільною мірою відрізків a та e .

3. Відрізки a та e не мають спільної міри. Такі відрізки називають **несумірними**. У цьому випадку процес вимірювання відрізка a в масштабі e буде нескінченним, і довжина відрізка a визначатиметься деяким нескінченним неперіодичним десятковим дробом, тобто ірраціональним числом. Прикладом несумірних відрізків є діагональ та сторона $a = 1$ квадрата, а саме: довжина діагоналі квадрата зі стороною $a = 1$ дорівнює ірраціональному числу $\sqrt{2}$.

**ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ**

1. Які числа називають раціональними? Наведіть приклади раціональних чисел.
2. Який є спосіб перетворення довільного раціонального числа $\frac{m}{n}$ на десятковий дріб?
3. Якими саме десятковими дробами можна подати довільне раціональне число?
4. Який зв'язок існує між множинами натуральних N , цілих Z і раціональних Q чисел?
5. Назвіть кілька елементів множин: а) натуральних чисел; б) додатних дійсних чисел; в) цілих чисел; г) раціональних чисел.
6. Назвіть кілька спільних елементів: а) множини від'ємних дійсних чисел і множини раціональних чисел; б) множини натуральних чисел і множини цілих чисел.
7. Які арифметичні операції не виконуються на множині: натуральних чисел; цілих чисел; раціональних чисел?
8. Які числа називають ірраціональними? Наведіть приклади.
9. Які числа утворюють множину дійсних чисел?
10. Що таке координатна пряма?
11. Поясніть зміст твердження: між множиною дійсних чисел і множиною точок координатної прямої існує взаємно однозначна відповідність.

12. Чи є найменше та найбільше числа серед усіх раціональних чисел? Відповідь обґрунтуйте.
13. Чи є найменше число серед додатних раціональних чисел? Відповідь обґрунтуйте.



РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

1'. Усно. Чи правильне твердження:

- 1) довільне натуральне число є одночасно цілим і раціональним числом;
- 2) усі додатні десяткові дробі належать до множини раціональних чисел;
- 3) одне і те саме раціональне число можна подати у вигляді єдиного дробу виду $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$;
- 4) довільне дійсне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу;
- 5) серед усіх цілих чисел є найменше і найбільше?

2'. Усно. Які елементи множини

$$A = \left\{ -5; -\frac{1}{2}; -1,3(5); 0; 0,1; 11; \frac{2}{3}; 5,023002300023\dots; \pi; \frac{1}{5} - \pi \right\} \text{ є числами:}$$

- 1) натуральними; 2) цілими; 3) дробовими; 4) раціональними;
- 5) невід'ємними; 6) ірраціональними; 7) дійсними?

3'. Назвіть кілька значень x , при яких твердження є правильним або неправильним:

- 1) $x \in \mathbb{N}$; 2) $x \in \mathbb{Q}$; 3) $x \notin \mathbb{Z}$; 4) $x \notin \mathbb{R}$.

4'. Виберіть серед наведених правильні твердження:

- 1) $\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$; 2) $-5 \in \mathbb{N}$; 3) $2,1 \notin \mathbb{Z}$; 4) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$; 5) $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \pm b \in \mathbb{N}$;
- 6) $ab \in \mathbb{N} \Rightarrow a, b \in \mathbb{N}$; 7) $a + b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a, b \in \mathbb{Q}$.

5'. Подайте дане число у вигляді скінченного або нескінченного десяткового дробу:

- 1) $-\frac{1}{40}$; 2) $1\frac{3}{20}$; 3) $\frac{8}{37}$; 4) $\frac{7}{12}$; 5) $-\frac{5}{11}$; 6) $2\frac{4}{11}$; 7) $\frac{7}{74}$.

6'. Доповніть речення так, щоб воно стало правильним твердженням:

- 1) довільне раціональне число завжди можна подати у вигляді нескінченного ... десяткового дробу;
- 2) множина цілих чисел є підмножиною множини ... чисел;
- 3) довільне ... число можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

7'. Знайдіть числове значення виразу:

- 1) $\frac{\left(140\frac{7}{30} - 138\frac{5}{12}\right) : 18\frac{1}{6}}{0,002}$;
- 2) $\frac{\left(49\frac{5}{24} - 46\frac{7}{20}\right) \cdot 2, (3) + 0,6}{0,2}$;
- 3) $\frac{0,134 + 0,05}{18\frac{1}{6} - 1\frac{11}{14} - 0,1(3) \cdot 2\frac{6}{7}}$;
- 4) $\left(-6\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{\sqrt{324}}{2} \cdot \frac{\sqrt{0,16}}{0,2}\right) : \sqrt{25}$.

- 8'.** Які арифметичні операції завжди виконуються на множині:
а) натуральних чисел; б) цілих чисел; в) раціональних чисел?
- 9'.** Порівняйте дійсні числа:
1) $5,63479\dots$ і $5,63497\dots$; 2) $-3,4833\dots$ і $-3,5829\dots$; 3) $15,25\dots$ і $\frac{61}{4}$;
4) $-\frac{3}{8}$ і $-0,375\dots$; 5) $\frac{5}{9}$ і $0,(5)$; 6) $-1,(27)$ і $-1,272$.
- 10'.** Розмістіть числа:
1) $2,371\dots$; $3,01$; $2,37$; $2,(37)$; $-2,(3)$ у порядку зменшення;
2) $5,04$; $-5,04\dots$; $4,451$; $4,(45)$; $-4,67$ у порядку збільшення.
- 11'.** Знайдіть наближене значення суми $a + b$, різниці $a - b$, добутку ab і частки $\frac{a}{b}$ дійсних чисел a і b з точністю: а) до $0,1$; б) до $0,01$:
1) $a = 1,0539\dots$, $b = 2,0610\dots$; 2) $a = \frac{7}{30}$, $b = 5,121$; 3) $a = -\frac{20}{9}$, $b = -\frac{8}{15}$.
- 12'.** Наведіть приклади квадратного рівняння, корені якого — ірраціональні числа.
- 13'.** Наведіть приклади двох ірраціональних чисел:
1) сума яких є число ірраціональне; 2) сума яких є число раціональне.
- 14'.** Чи завжди має розв'язки рівняння $a + x = b$, де a і b — задані натуральні числа, на множині всіх:
1) натуральних чисел; 2) додатних раціональних чисел; 3) цілих чисел?
- 15'.** Чи завжди має розв'язки рівняння $ax = b$, де a і b — задані натуральні числа, на множині всіх: 1) цілих чисел; 2) раціональних чисел?
- 16'.** Раціональним чи ірраціональним числом визначається гіпотенуза прямокутного трикутника, якщо задано його катети a і b :
1) $a = 1$, $b = 2$; 2) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$?
- 17.** Числа $a + b$ і $a - b$ — раціональні. Чи раціональні числа a і b ?
- 18.** Запишіть перші три десяткових знаки нескінченного десяткового дробу для числа:
1) $3 + \sqrt{2}$; 2) $\frac{3}{7} + \sqrt{3}$; 3) $0,(6) - \sqrt{6}$; 4) $5\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{2}\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{3}\sqrt{5}$.
- 19*.** Що більше: $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ чи $\sqrt{3} + \sqrt{19}$?
- 20*.** Доведіть, що сума і різниця раціонального та ірраціонального чисел є числом ірраціональним.
- 21*.** Подайте дійсне число у вигляді звичайного дробу:
1) $3,025$; 2) $-1,15$; 3) $3,(6)$; 4) $-2,(81)$; 5) $0,2181818\dots$; 6) $3,12(6)$.
- 22*.** Один із кутів прямокутного трикутника становить 60° , а менший катет дорівнює 1. Доведіть, що довжину більшого катета цього трикутника не можна виразити раціональним числом.
- 23*.** Доведіть, що число $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ірраціональне.



ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

- 24*.** Побудуйте квадрат, довжина сторони якого дорівнює: 1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{14}$.

§2

Відсоткові розрахунки



Нагадаємо, що відсотком числа називають $\frac{1}{100}$ частину цього числа і позначають $\%$. Однією з поширених задач на відсотки є знаходження відсотка від даного числа: число b , яке становить $p\%$ від числа a , визначають за формулою: $b = \frac{ap}{100}$.

Цю формулу можна використати для розв'язування ще двох задач:

- 1) знаходження числа за відомим його відсотком: якщо $p\%$ від числа a дорівнює b , то $a = \frac{100b}{p}$;
- 2) знаходження відсоткового відношення p числа b і числа a , яке визначають за формулою: $p = \frac{b}{a} 100\%$.



Задача 1. Робітник протягом робочої зміни виготовив 96 деталей замість запланованих 80 деталей. На скільки відсотків він перевиконав план?

Розв'язання. Необхідно визначити, скільки відсотків число $b = 96 - 80 = 16$ становить від числа $a = 80$.

Шукане число p знайдемо за формулою: $p = \frac{100 \cdot 16}{80} \% = 20\%$.



Задача 2. Як зміниться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на 20% , а ширину — на 10% ?

Розв'язання. Нехай довжина прямокутника x , а ширина — y , тоді його площа дорівнює xy . Після збільшення довжини і ширини прямокутника на 20% і 10% відповідно його площа дорівнюватиме $1,2x \cdot 1,1y = 1,32xy$, тобто площа прямокутника збільшиться на $0,32xy$, що становить 32% від xy .



Задача 3. Число a становить 80% від числа b , а число c — 140% від числа b . Знайдіть числа a , b і c , якщо c більше від a на 72.

Розв'язання. За умовою задачі: $a = 0,8b$, $c = 1,4b$, $c - a = 72$, тоді $c - a = 1,4b - 0,8b = 0,6b$, звідси $0,6b = 72$, $b = 120$, $a = 0,8b = 96$, $c = 1,4b = 168$.

Історія розвитку математики засвідчує, що виникнення поняття відсотка відбулося через необхідність здійснення грошових розрахунків.



ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Розглянемо найпростіші задачі *фінансової математики*.

Нехай b — початкова грошова сума, p — річна відсоткова ставка.

1. Знайдемо формулу для обчислення нарощеної грошової суми за *простими відсотками*.

Нарощена сума становитиме:

після 1-го року $b_1 = b + b \cdot \frac{p}{100} = b \left(1 + \frac{p}{100}\right);$

після 2-го року $b_2 = b \left(1 + \frac{p}{100}\right) + b \cdot \frac{p}{100} = b \left(1 + \frac{2p}{100}\right);$

.....
після n -го року $b_n = b \left(1 + \frac{np}{100}\right).$

Отже, шуканою формулою є:

$$b_n = b \left(1 + \frac{np}{100}\right), n \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

2. Знайдемо формулу для обчислення нарощеної грошової суми за *складними відсотками*, якщо відсоток прибутку нараховується на всі грошові надходження:

після 1-го року $b_1 = b + b \cdot \frac{p}{100} = b \left(1 + \frac{p}{100}\right);$

після 2-го року $b_2 = b_1 + b_1 \cdot \frac{p}{100} = b_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = b \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2;$

.....
після n -го року $b_n = b \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$

Отже, під час нарахування складних відсотків протягом n років нарощена грошова сума визначатиметься за формулою:

$$b_n = b \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, n \in \mathbf{N}. \quad (2)$$

Величину $k = 1 + \frac{p}{100}$ називають *коефіцієнтом складного відсотка*.

3. Нехай відсоток нараховується *рівномірно* m разів на рік за тієї самої щорічної відсоткової ставки p . Тоді за m -ту частину року нараховуватиметься відсоток $\frac{p}{m}$, а сума надходжень за n років при mn нарахуваннях визначатиметься за формулою:

$$b_n = b \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn}, n \in \mathbf{N}. \quad (3)$$



Задача 1. Нехай $b = 10\,000$ грн — початкова сума, яку покладено в банк під $p = 10\%$ річних. Знайдіть нарощування суми вкладу за різними нарахуваннями відсотків через рік; через 5 років.

Розв'язання. За простими відсотками за формулою (1) дістанемо:

$$b_1 = 10\,000 \left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11\,000 \text{ (грн)}; \quad b_5 = 10\,000 \left(1 + \frac{5}{10}\right) = 15\,000 \text{ (грн)}.$$

За складними відсотками за формулою (2) дістанемо:

$$b_1 = 10\,000 \left(1 + \frac{1}{10}\right) = 11\,000 \text{ (грн)}; \quad b_5 = 10\,000 \left(1 + \frac{1}{10}\right)^5 = 16\,105,1 \text{ (грн)}.$$

При рівномірному нарахуванні відсотків двічі на рік за формулою (3) матимемо:

$$b_1 = 10\,000 \left(1 + \frac{1}{20}\right)^2 = 11\,025 \text{ (грн)}; \quad b_5 = 10\,000 \left(1 + \frac{1}{20}\right)^{10} \approx 16\,288,95 \text{ (грн)}.$$

Зазначимо, що операцію знаходження початкового вкладу називають *дисконтуванням*.



Задача 2. Знайдіть суму вкладу до ощадбанку, якщо 12 % цього вкладу дорівнюють 240 грн.



Розв'язання. Зрозуміло, що 1 % вкладу дорівнює $\frac{240}{12} = 20$ грн, тому загальна сума вкладу становить: $20 \cdot 100 = 2\,000$ (грн).



ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що називають відсотком від числа?
2. Які є основні задачі на відсотки?
3. За якою формулою обчислюють відсоток від числа?
4. Як знаходять число за відомим відсотком?
5. Чому дорівнює відсоткове відношення двох чисел?



РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

- 25'. Знайдіть: 1) 15 % від числа 50; 2) 22 % від числа 25.
- 26'. Який відсоток становить число 120 від числа 300?
- 27'. Сторону квадрата збільшили на 10 %. На скільки відсотків збільшилася його площа?
- 28°. Знайдіть два числа, якщо їх сума становить 36, а 25 % одного з них дорівнюють 35 % від другого.
- 29°. Що більше: 38 % від 87 чи 87 % від 38?
30. Маса двох шматків латуні дорівнює 30 кг. Перший шматок містить 5 кг чистої міді, а другий — 4 кг. Скільки відсотків міді в першому шматку латуні, якщо у другому на 15 % більше, ніж у першому?
31. До розчину, що містить 40 г солі, додали 200 г води, після чого його концентрація зменшилася на 10 %. Скільки води містить розчин і якою була його концентрація?
32. У двох бочках було води порівну. Кількість води в першій бочці спочатку зменшили на 10 %, а потім збільшили на 10 %. Кількість води у другій бочці спочатку збільшили на 10 %, а потім зменшили на 10 %. У якій бочці стало більше води?
33. Три коробки наповнено горіхами. У другій коробці на 10 % горіхів більше, ніж у першій, і на 30 % більше, ніж у третій. Скільки горіхів у кожній коробці, якщо в першій на 80 горіхів більше, ніж у третій?
34. Знайдіть число, 3,6 % якого дорівнюють числу $\frac{3 + 4,2 : 0,1}{(1 : 0,3 - 2,3) \cdot 0,3125}$.



ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

35. На товар двічі було знижено ціну, щоразу на 15 %. На інший товар, ціна якого до зниження була такою самою, як і першого, знизили ціну один раз на 30 %. Який з цих товарів після зниження став дешевшим?

- 36*.** Вкладник поклав до ощадбанку 2000 грн під 10 % річних. Визначте величину вкладу за простими відсотками через рік і через 5 років.
- 37*.** Нехай 2000 грн видано в кредит на 3 місяці під прості відсотки за ставкою 10 % на місяць. Визначте нарощувані суми боргу наприкінці кожного місяця.
- 38*.** Початковий вклад 250 тис. гривень покладено на 4 роки під складні відсотки за ставкою 100 % річних. Знайдіть нарощувані суми вкладу за кожний рік.
- 39*.** Обчисліть початковий борг, повна сума якого через 3 роки становить 7 000 грн, якщо відсотки нараховуються за ставкою 140 % наприкінці року.

§3

Числові функції та їх властивості



Поняття функції є одним з найважливіших понять математики. Ідею функціональної залежності сягає в глибоку давнину, коли люди тільки почали розуміти існування різних видів залежності у природі. Як і інші, поняття функції виникло з потреб практики. У XVII — XVIII ст. з розвитком мореплавства, судно-, машинобудування, астрономії, механіки та інших технічних дисциплін постала необхідність створення математичного апарату для опису різних процесів та явищ. Це привело до появи змінних величин. Задовго до того, як були сформовані загальні поняття змінної величини і функції, їх графічно використовували в математиці. Значну роль у розвитку цих понять відіграв метод координат французьких математиків П. Ферма (1601 — 1665) і Р. Декарта (1596 — 1650). Метод координат почали використовувати для графічного дослідження функцій і графічного розв’язування рівнянь. Відтоді настав новий етап, що позначився потужним розвитком не тільки математики, а й загалом природознавства.

Термін «функція» запровадив німецький математик Г. Лейбніц (1646 — 1716), який функцію пов’язував з графіком. Академік Петербурзької Академії наук Л. Ейлер (1707 — 1783) і швейцарський математик Й. Бернуллі (1667 — 1748) вважали функцію аналітичним виразом (формулою). Згодом Л. Ейлер увів загальніший підхід до поняття функції як залежності однієї змінної величини від іншої. Цю ідею розвинули російський математик М. І. Лобачевський (1792 — 1856), німецький математик П. Діріхле (1805 — 1859) та інші вчені.

Подальший розвиток поняття функції пов’язаний з розглядом відповідностей між множинами, елементами яких можуть бути не тільки числа, а й об’єкти довільної природи. Вагомий внесок у розвиток теорії функцій зробили українські математики М. В. Остроградський (1801 — 1862), В. Я. Буняковський (1804 — 1889), М. П. Кравчук (1892 — 1942), Є. Я. Ремез (1896 — 1975), В. К. Дзядик (1919 — 1998) та інші.



Г. Лейбніц

Різноманітні процеси, що відбуваються в довкіллі, слугують прикладами явищ, у яких зміна одних величин спричиняє зміну інших. Для вивчення того чи іншого явища потрібно встановити взаємозв'язок між величинами, які його описують, і дослідити його властивості. Такий взаємозв'язок у математиці задається за допомогою функцій.

Наведемо приклади.



1. Площа S (см²) круга радіуса r (см) залежить від довжини радіуса і визначається за формулою $S = \pi r^2$.

За цю формулою для кожного значення $r > 0$ можна знайти відповідне значення S .

Наприклад, якщо $r = 2$, то $S = 4\pi \approx 12,56$; якщо $r = 3,2$, то $S = 10,24\pi \approx 32,1$; якщо $r = 5,1$, то $S = 26,01\pi \approx 81,67$.



2. Потяг Київ — Донецьк на певному проміжку шляху рухається зі сталою швидкістю 80 км/год.

Шлях, пройдений потягом, залежить від часу руху.

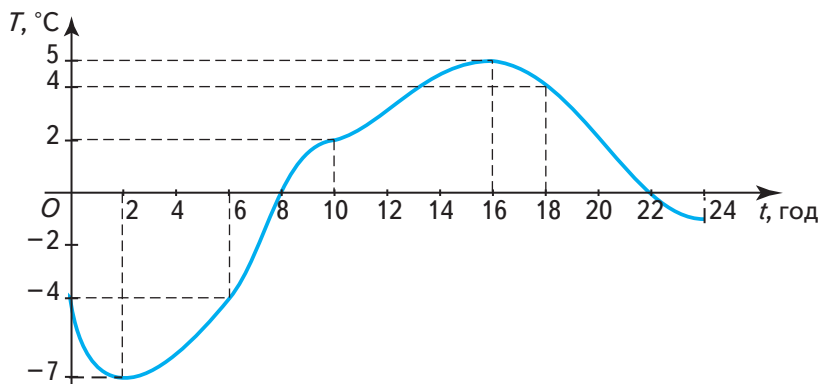
Позначимо час руху потяга в годинах через t , а пройдений шлях у кілометрах — через s . Залежність змінної s від змінної t в цьому випадку наведено в таблиці 1.

Т а б л и ц я 1

t , год	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
s , км	80	120	160	200	240	280	320



3. На малюнку 3 зображено графік зміни температури повітря протягом доби.



Мал. 3

За допомогою цього графіка для кожного моменту часу t (у годинах) від 0 до 24 год можна знайти відповідне значення температури T (у градусах Цельсія).

Наприклад, якщо $t = 6$, то $T = -4$; якщо $t = 10$, то $T = 2$; якщо $t = 18$, то $T = 4$.

В усіх наведених прикладах йдеться про залежність двох змінних, причому одна з них (r , t) змінюється незалежно, а друга (S , s , T) — набуває значень залежно від значень першої змінної. Величину, яка змінюється незалежно, так і називають **незалежною змінною**, або **аргументом**, а другу —

залежною змінною. Звернемо увагу на те, що в усіх прикладах кожному значенню незалежної змінної відповідає одне і тільки одне значення залежної змінної. Такі змінні називають *функціонально залежними*. У розглянутих прикладах незалежні й залежні змінні виражаються дійсними числами.



Нехай D — деяка множина дійсних чисел.

Числовою функцією з областю визначення D називають таку залежність, при якій кожному числу x з множини D відповідає одне дійсне число y , і записують $y = f(x)$.

Змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, а y — *залежною змінною*, або *функцією*. Число $f(x_0)$ називають значенням функції f в точці $x_0 \in D$. Множину всіх значень незалежної змінної x називають *областю визначення функції* f і позначають $D(f)$. Множину значень функції, яких вона набуває при всіх значеннях x з її області визначення, називають *областю*, або *множиною значень функції*, і позначають $E(f)$. Окрім букв x, y, f можна вживати й інші букви.

Проаналізуємо наведені вище приклади.

Областю визначення функції, розглянутої в прикладі 1, є $r > 0$, або $r \in (0; +\infty)$, а множиною значень цієї функції є $S > 0$, або $S \in (0; +\infty)$, тобто і областю визначення, і множиною значень функції є множина всіх додатних чисел.

У прикладі 2 областю визначення функції є множина $D(s) = \{1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4\}$, а множиною значень — множина $E(s) = \{80; 120; 160; 200; 240; 280; 320\}$.

У прикладі 3 областю визначення функції є значення t , що задовольняють нерівність $0 \leq t \leq 24$, або $t \in [0; 24]$, а множиною значень є $-7 \leq T \leq 5$, або $T \in [-7; 5]$. Зазначені множини можна дістати, якщо графік функції спроектувати відповідно на вісь Ot і вісь температур OT (див. мал. 3).

Основними способами задання функції є *аналітичний* (за допомогою однієї або кількох формул), *графічний* і *табличний*.

Наведені вище приклади ілюструють основні способи задання функцій: аналітичний, або за допомогою формули (приклад 1), табличний (приклад 2), графічний (приклад 3).

Якщо функцію задано формулою і не зазначено її області визначення, то під останньою розуміють множину всіх дійсних значень аргументу, при яких ця формула має зміст.



Приклад 1. Знайдіть область визначення й область значень функції

$f(x) = \sqrt{x+1}$ та її значення $f(0)$, $f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f(8)$ і з'ясуйте, чи існують значення функції в точках $x = -2$; $-\frac{3}{2}$.

Розв'язання. З огляду на властивість квадратного кореня дана формула матиме зміст для всіх значень x , для яких $x+1 \geq 0$, або $x \geq -1$, тобто областю визначення функції є множина $[-1; +\infty)$, $D(f) = [-1; +\infty)$. Область значень

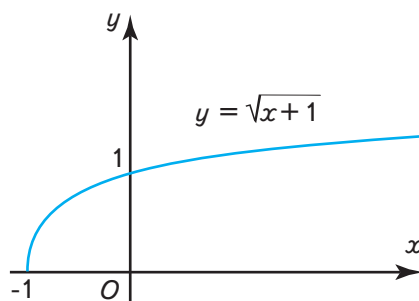
даної функції становлять значення $y = f(x) \geq 0$, тобто $E(f) = [0; +\infty)$, бо значення арифметичного квадратного кореня невід'ємні (мал. 4).

Зверніть увагу на те, що область визначення функції є проекцією її графіка на вісь Ox , а область значень — проекцією графіка на вісь Oy .

Знайдемо значення $f(0)$. Для цього в дану формулу замість x підставимо 0. Тоді одержимо: $f(0) = \sqrt{0+1} = 1$.

Аналогічно $f\left(\frac{5}{4}\right) = \sqrt{\frac{5}{4}+1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$;

$$f(8) = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3.$$



Мал. 4

Оскільки значення $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$ не належать області визначення функції, тобто $-2 \notin [-1; +\infty)$, $-\frac{3}{2} \notin [-1; +\infty)$, то функція в цих точках не визначена. Справді, якщо формально підставити значення $x = -2$ і $x = -\frac{3}{2}$ у задану формулу, то одержимо вирази $\sqrt{-1}$ і $\sqrt{-\frac{3}{2}}$, що на множині дійсних чисел не мають змісту.



Приклад 2. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{5x-3}{2}; \quad 2) y = \frac{2x}{x+1}; \quad 3) y = \frac{3x+1}{x^2-3x+2}; \quad 4) y = \frac{1}{2x-1} + 6\sqrt{x}.$$

Розв'язання

1) У цьому випадку змінна x може набувати довільних дійсних значень, тобто $D(f) = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

2) Заданий аналітичний вираз існує для всіх дійсних значень, крім $x = -1$, тобто $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

3) Область визначення цієї функції знайдемо з умови, що знаменник дробу не дорівнює нулю. Для цього розв'яжемо рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Отже, областю визначення функції є всі дійсні значення x , крім $x = 1$ і $x = 2$, тобто $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

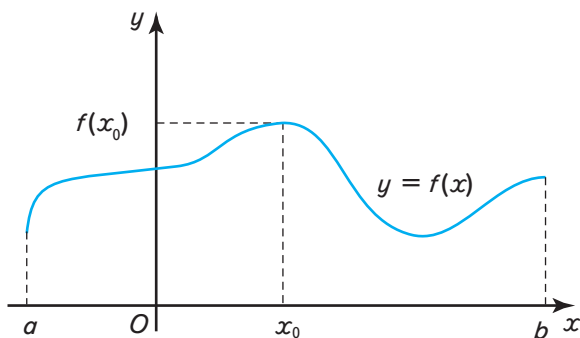
4) Очевидно, задана функція існуватиме, якщо матимуть зміст одночасно обидва доданки суми. Перший доданок існує при всіх значеннях $x \neq \frac{1}{2}$, а другий — якщо $x \geq 0$. Тому областю визначення функції є всі невід'ємні значення x , крім $x = \frac{1}{2}$, тобто $D(f) = \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.



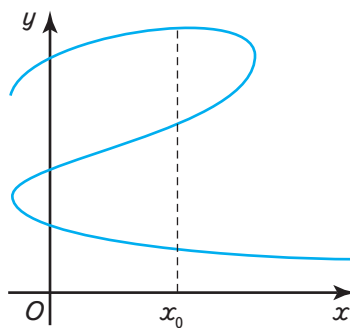
Графіком функції f називають множину точок $(x; y)$ координатної площини xOy , де $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

Зазначимо, що не будь-яка крива в прямокутній системі координат xOy задає функцію. За означенням, функцію може задавати тільки така крива, яку кожна пряма $x = x_0$, $x_0 \in D(f)$, паралельна осі Oy , перетинає лише в одній точці з ординатою $y_0 = f(x_0)$ (мал. 5).

Крива, зображена на малюнку 6, функцію не задає, бо в цьому випадку значенню x_0 відповідає не одне, як того вимагає означення функції, а три значення змінної y .



Мал. 5



Мал. 6

Розглянемо властивості функцій.

Монотонні функції

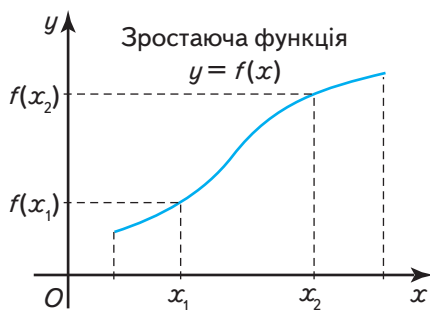
До монотонних належать зростаючі, спадні, неспадні та незростаючі функції.



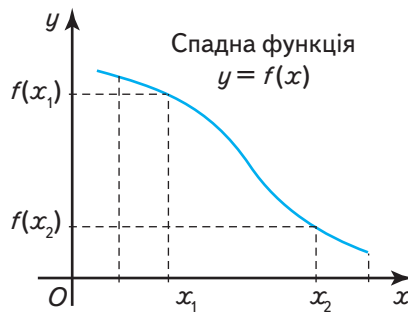
Нехай функція $f(x)$ визначена на множині D .

Функція $f(x)$ називається **зростаючою** на множині D , якщо для довільних значень x_1 та x_2 цієї множини з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, тобто більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (мал. 7).

Функція $f(x)$ називається **спадною** на множині D , якщо для довільних значень x_1 та x_2 цієї множини з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) < f(x_1)$, тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (мал. 8).



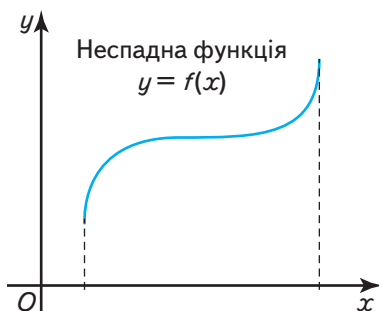
Мал. 7



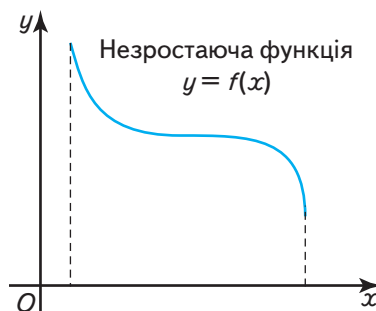
Мал. 8

Функція $f(x)$ називається **неспадною** на множині D , якщо для довільних значень x_1 та x_2 цієї множини з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) \geq f(x_1)$ (мал. 9).

Функція $f(x)$ називається **незростаючою** на множині D , якщо для довільних значень x_1 та x_2 цієї множини з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) \leq f(x_1)$ (мал. 10).



Мал. 9



Мал. 10

Якщо функція незростаюча або неспадна, то її значення на деяких проміжках є сталими. Зростаючі та спадаючі функції називають ще **строго монотонними**.



Схема дослідження функції $y = f(x)$ на монотонність

1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$.
2. Дослідіть на знак різницю $f(x_2) - f(x_1)$ для довільних $x_1, x_2 \in D(f)$, якщо $x_2 > x_1$. Якщо $f(x_2) - f(x_1) > 0$, то функція буде **зростаючою** на множині D ; якщо $f(x_2) - f(x_1) < 0$, то **спадною** на цій множині. Якщо жодна з цих умов не виконується, то функція не є монотонною в усій її області визначення. У такому випадку намагаються знайти окремі проміжки області визначення функції, на яких вона є монотонною.



Приклад 3. Дослідіть на монотонність функцію: $f(x) = 3x - 1$.

- **Розв'язання.** Областю визначення заданої функції є множина всіх дійсних чисел, $D(f) = \mathbb{R}$. Нехай $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ — довільні значення аргументу, причому $x_2 > x_1$. Відповідні значення функції $f(x_1) = 3x_1 - 1$ і $f(x_2) = 3x_2 - 1$.
- Розглянемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = 3x_2 - 1 - 3x_1 + 1 = 3(x_2 - x_1) > 0$.
- Отже, $f(x_2) > f(x_1)$, і задана функція зростає в усій області визначення.



Приклад 4. Покажіть, що функція: $\varphi(x) = 2x^2 + 5$ на проміжку $(-\infty; 0]$ є спадною, а на проміжку $(0; +\infty)$ — зростаючою.

- **Розв'язання.** Областю визначення функції $\varphi(x) = 2x^2 + 5$ є множина всіх дійсних чисел, $D(\varphi) = \mathbb{R}$.
- Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з області визначення функції, причому $x_2 > x_1$.
- Тоді $\varphi(x_1) = 2x_1^2 + 5$; $\varphi(x_2) = 2x_2^2 + 5$;
- $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = 2x_2^2 + 5 - 2x_1^2 - 5 = 2x_2^2 - 2x_1^2 = 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$.

- Якщо $x_1, x_2 \in (-\infty; 0]$, то $x_1 + x_2 < 0$, й оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) < 0$, або $\varphi(x_2) < \varphi(x_1)$, тобто на проміжку $(-\infty; 0]$ функція є спадною.
- Аналогічно, якщо $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$, то $x_1 + x_2 > 0$, і оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) > 0$, або $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$, тобто на проміжку $(0; +\infty)$ функція є зростаючою.

Парні та непарні функції

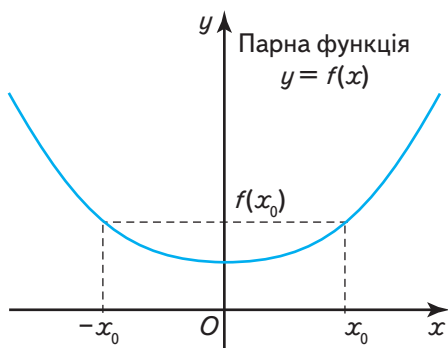


Нехай функція $f(x)$ визначена на множині D , причому якщо $x \in D$, то $-x \in D$.

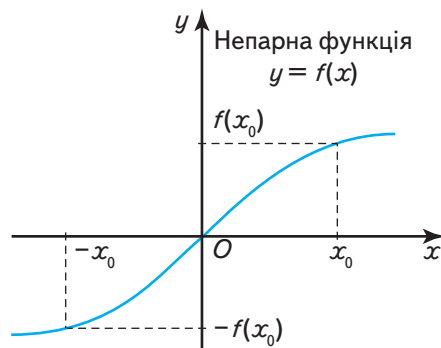
Функція $f(x)$ називається **парною**, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D$.

Функція $f(x)$ називається **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D$.

Отже, область визначення як парної, так і непарної функції симетрична відносно точки O , і для протилежних значень аргументу значення парної функції збігаються, а непарної — є протилежними числами. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy , а графік непарної функції — відносно початку координат (мал. 11, 12).



Мал. 11



Мал. 12



Схема дослідження функції $y = f(x)$ на парність або непарність

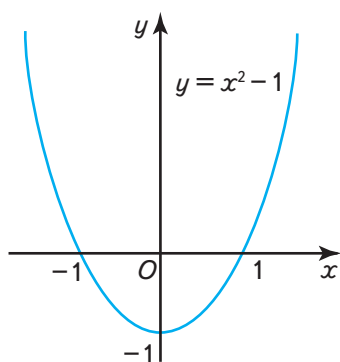
1. Знайдіть область визначення функції $D(f)$ і переконайтеся, що вона симетрична відносно точки O . Якщо ця умова не виконується, то така функція не може бути ні парною, ні непарною.

2. Знайдіть значення функції $f(-x)$ і порівняйте його з $f(x)$: якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D(f)$, то функція **парна**; якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D(f)$, то функція **непарна**. Якщо жодна з цих умов не виконується, то функція не є ні парною, ні непарною.

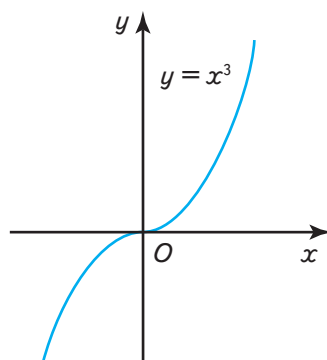


Приклад 5. Визначте, чи парна функція $f(x) = x^2 - 1$.

- **Розв'язання.** $D(f) = \mathbf{R}$, функція парна, бо $f(-x) = x^2 - 1 = f(x)$ для всіх x з множини $\mathbf{R}$. Графік функції симетричний відносно осі Oy (мал. 13).



Мал. 13



Мал. 14

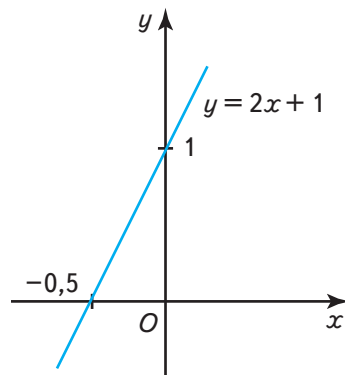


Приклад 6. Визначте, чи парна функція $\varphi(x) = x^3$.

Розв'язання. $D(\varphi) = \mathbb{R}$, функція непарна, бо $\varphi(-x) = -x^3 = -\varphi(x)$ для всіх x з її області визначення. Графік функції симетричний відносно початку координат (мал. 14).



Приклад 7. Функція $g(x) = 2x + 1$, $D(g) = \mathbb{R}$, не є ні парною, ні непарною, бо жодна з рівностей $g(x) = g(-x)$ і $g(x) = -g(-x)$ не справджується на множині $\mathbb{R}$ (мал. 15).



Мал. 15



Приклад 8. Функція $u(x) = \sqrt{x+1}$, $D(u) = [-1; +\infty)$, не є ні парною, ні непарною, бо її область визначення не симетрична відносно точки O (див. мал. 4).



Приклад 9. Функція $v(x) = 0$, $D(v) = \mathbb{R}$, одночасно є і парною, і непарною (обґрунтуйте). Її графіком є вісь Ox .



ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Функцію також можна задавати різними аналітичними виразами на окремих проміжках зміни незалежної змінної.

1. Знайдемо аналітичний вираз для функції $s = s(t)$, яка виражає шлях руху парашутиста залежно від часу t (у секундах, s) під час падіння з літака, якщо після стрибка парашутист вільно падає a s , а потім розкриває парашут і b s падає зі сталою швидкістю v_0 .

• Очевидно, що за проміжок часу $0 \leq t \leq a$ шлях парашутиста визначається формулою $s = \frac{gt^2}{2}$. За a s він пролетить шлях $\frac{ga^2}{2}$, після чого кожної наступної секунди його швидкість дорівнюватиме v_0 , тому за проміжок часу $a \leq t \leq a + b$ його шлях визначатиметься формулою: $s = \frac{ga^2}{2} + v_0(t - a)$.

Отже, дістанемо функцію:

$$s(t) = \begin{cases} \frac{gt^2}{2}, & \text{якщо } 0 \leq t \leq a, \\ \frac{ga^2}{2} + v_0(t-a), & \text{якщо } a \leq t \leq a+b. \end{cases}$$

Областю визначення цієї функції є $0 \leq t \leq a+b$, або $t \in [0; a+b]$, а множиною значень — $0 \leq s \leq \frac{ga^2}{2} + v_0b$, або $s \in \left[0; \frac{ga^2}{2} + v_0b\right]$.

2. Нехай кожному натуральному числу n відповідає n -й десятковий знак наближеного значення $\sqrt{2}$. Чи задає така відповідність функцію?

• Відомо, що $\sqrt{2}$ є ірраціональним числом і $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$, причому кожному $n \in \mathbf{N}$ відповідає один і тільки один десятковий знак цього нескінченного неперіодичного десяткового дробу. Тому дана відповідність задає функцію $y = \varphi(n)$, $n \in \mathbf{N}$, яку називають *числовою послідовністю*.

Наприклад, $\varphi(1) = 4$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 2$ (мал. 16).

Зазначимо, що це приклад функції, заданої *словесно*.

3. Обчислимо значення функції $f(x) = \frac{4}{x^2} + x^2 y$

точках, у яких $\frac{2}{x} + x = 1$.

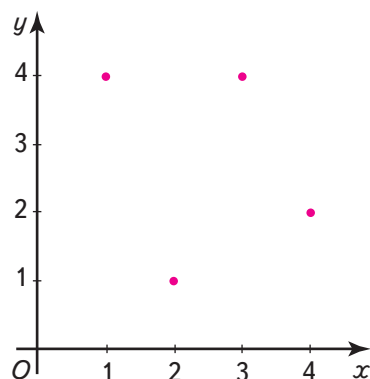
• Маємо:

$$f(x) = \frac{4}{x^2} + x^2 = \left(\frac{2}{x} + x\right)^2 - 4 = 1 - 4 = -3.$$

4. Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[0; 1]$.

Яка область визначення функції $f(x-5)$?

• Нехай $x-5 = t$, тоді функція $f(x-5) = f(t)$ визначена, якщо $t \in [0; 1]$, тобто $x-5 \in [0; 1]$ або $0 \leq x-5 \leq 1$, звідси $5 \leq x \leq 6$. Отже, функція $f(x-5)$ визначена на відрізку $[5; 6]$.

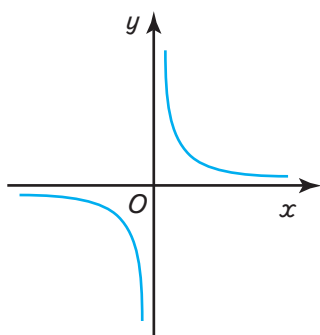


Мал. 16

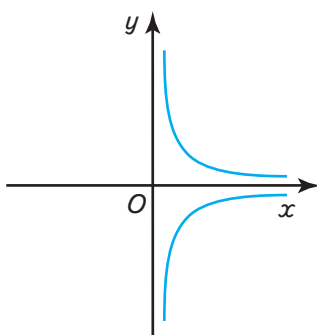


ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

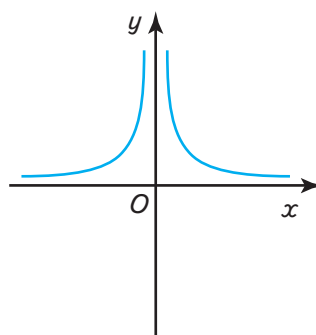
1. Дайте означення функції.
2. Що називають областю визначення та областю значень функції? Наведіть приклади.
3. Які ви знаєте способи задання функції?
4. Що таке графік функції? Чи будь-яка крива на координатній площині є графіком функції?
5. Чи завжди область визначення аналітичного виразу є областю визначення функції, яку він задає? Наведіть приклади.



Мал. 17

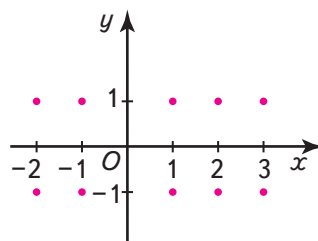


Мал. 18



Мал. 19

6. Як для функції, заданої графічно, знайти область її визначення та область значень?
7. Яку функцію називають зростаючою (спадною), неспадною (незростаючою)? Наведіть приклади.
8. Яку функцію називають парною (непарною)? Наведіть приклади.
9. Які з множин точок на малюнках 17 — 20 задають функцію? Відповідь обґрунтуйте.



РОЗВ'ЯЖІТЬ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

Мал. 20

- 40'. Усно. Чи правильне твердження:
 - 1) будь-яка пряма $x = a$, $a \in D(f)$, перетинає графік функції $y = f(x)$ в одній точці;
 - 2) будь-яка пряма $y = b$, $b \in E(f)$, перетинає графік функції $y = f(x)$ в одній точці;
 - 3) якщо $f(x) = |x|$, то $D(f) = \mathbf{R}$, $E(f) = \mathbf{R}$;
 - 4) графік зростаючої функції не може бути симетричним відносно осі Oy ?
- 41'. Заповніть таблицю 2, якщо функцію задано формулою $y = \frac{x}{2x-1}$.

Таблиця 2

x	-1			0	0,5	
y		0	1			-1

- 42'. Знайдіть невідому координату точки, якщо вона належить графіку функції $y = \frac{2x+5}{3}$: $A(0; y)$, $B(x; 0)$, $C(-2; y)$, $D(x; 0,5)$.
- 43'. За графіком функції $y = f(x)$ (мал. 21) знайдіть:
 - 1) область визначення; 2) область значень;
 - 3) $f(0)$, $f(-3)$, $f(5)$, $f(\frac{5}{2})$; 4) точки перетину з осями координат;

- 5) значення x , за яких $f(x) = 4$, $f(x) = 2$,
 $f(x) = -2$;
 6) інтервали монотонності функції.

44'. Рухаючись зі швидкістю v км/год протягом 6 год, автомобіль пройшов шлях s км. Задайте формулою залежність s від v . Користуючись цією формулою: а) знайдіть s , якщо $v = 65$ км/год; б) знайдіть v , якщо $s = 363$ км.

45°. У коло радіусом r вписано $\triangle ABC$, сторона AB якого збігається з діаметром кола. Знайдіть залежність катета $AC = b$ від катета $BC = x$, якщо вершина C трикутника пробігає півколо.

46°. Знайдіть залежність довжини b одного катета прямокутного трикутника від довжини a другого катета, якщо гіпотенуза $c = 5$.

47°. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{2x}{x^2+1}$; 2) $y = \sqrt{5-2x} + 1$;

3) $y = \frac{1}{x^2-x} + 2x$; 4) $y = \frac{3x-1}{x^2-3x+2}$.

48°. Яка із заданих функцій є парною, непарною, ні парною, ні непарною:

1) $y = 5x^2 + 1$; 2) $y = x^5 + 3x^3 - x$; 3) $y = 2x^4 - x^3 + 1$;

4) $y = 3x - \frac{2}{x}$; 5) $y = 4x^2 + |x|$; 6) $y = \frac{|x|}{2x}$;

7) $y = \sqrt[3]{x} + x$; 8) $y = \sqrt[3]{x^3+5}$; 9) $y = \sqrt{x} + 8x$?

49. Користуючись означенням, дослідіть функцію на монотонність:

1) $y = 3x + 1$; 2) $y = -2x + 3$; 3) $y = x^2 - 2$;

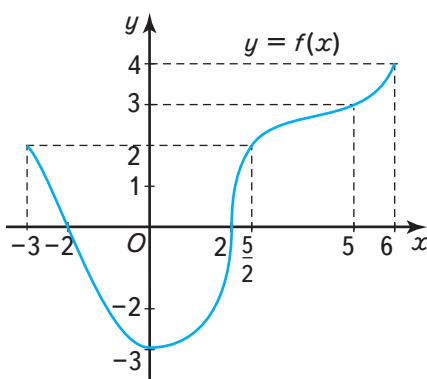
4) $y = -2x^2 - 1$; 5) $y = \frac{1}{x}$.

50. $f(x) = \begin{cases} -4, & \text{якщо } x < -1, \\ 2x - 2, & \text{якщо } -1 \leq x < 3, \\ 4, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$

Яке із співвідношень є правильним:

1) $f(-2) = -f(2)$; 2) $f(0) < f(-3)$;

3) $f(4) > f(1)$; 4) $\frac{f(-2)}{f(2)} > 0$?



Мал. 21

$$51. f(x) = \begin{cases} x + 9, & \text{якщо } -9 \leq x < 0, \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 9. \end{cases}$$

Яке із співвідношень є правильним:

- 1) $f(-1) < f(1)$; 2) $f(-2) \neq f(2)$;
3) $f(0) = f(9)$; 4) $f(-9) = f(0)$?

52*. Доведіть, що сума та добуток двох парних функцій є парною функцією.

53*. Нехай $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$. Знайдіть значення x , за яких:

- 1) $f(x) = 0$; 2) $0 < f(x) < 1$; 3) $|f(x)| \leq 2$.

54*. Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-1; 0]$. Яка область визначення функції:

- 1) $f(2x)$; 2) $f(-x^2)$; 3) $f(|x| + x)$?

55*. Функцію задано таблицею 3.

Таблиця 3

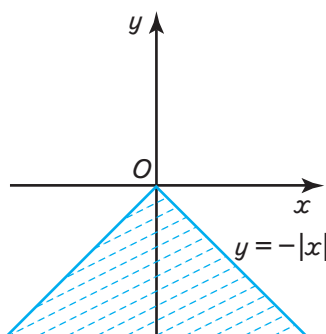
x	4	6	-10	-12	20
y	-2	-3	5	6	-10

За таблицею значень x і y знайдіть залежність y від x у вигляді формули.

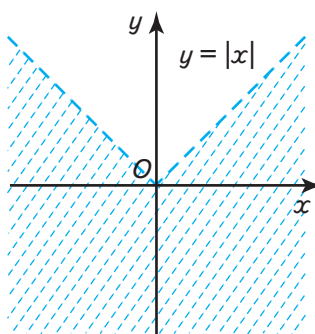
56*. Знайдіть область визначення і область значень функції:

- 1) $y = -x^2 + 6x - 4$; 2) $y = 2 - |x|$;
3) $y = x^2 - 8x + 13$; 4) $y = \sqrt{25 - x^2}$;
5) $y = \frac{x}{1 + x^2}$; 6) $y = \frac{1}{\sqrt{x - |x|}}$.

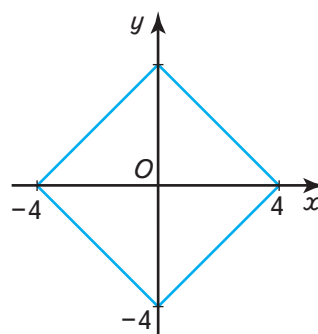
57*. Якими нерівностями пов'язані координати множин точок, обмежених графіками функцій $y = -|x|$ та $y = |x|$ і заштрихованих на малюнках 22, 23?



Мал. 22



Мал. 23



Мал. 24

58*. Яку з множин точок наведено на малюнку 24? Поясніть, чому ця множина функцію не задає.